www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES ATTACHES et

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE

ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

JUIN 1990

(Elèves Cadres de Gestion Statistique)

OPTION A

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème indépendants, et qui peuvent donc être abordés dans un ordre indifférent. Le premier porte sur les dénombrements et les suites, le second sur l'algèbre linéaire.

EXERCICE

Un commerçant pose à un ami (enseignant scientifique) la question suivante :

"De combien de façons peut-on payer la somme de 4 francs, si on ne dispose que de pièces de 1 franc et 2 francs ? Les pièces de 1 F sont indiscernables entre elles, de même que les pièces de 2 F."

L'enseignant répond :

"Cher ami, cette question d'apparence simple est insuffisamment précise, pour la raison suivante" :

a - Si le paiement est "global" (on remet d'un coup toutes les pièces au créancier), la réponse est "trois façons". Car on peut utiliser zéro, une ou deux pièces de 2 francs (le reste étant payé en pièces de 1 franc s'il y a lieu).

b - Si le paiement est "pièce à pièce", et si l'on tient compte de l'ordre de remise des pièces, la réponse est "cinq façons". Car on peut utiliser les séquences suivantes, considérées comme toutes distinctes :

(2,2) ; (2,1,1) ; (1,2,1) ; (1,1,2) ; (1,1,1,1).

Le commerçant, d'abord surpris, comprend rapidement la différence des points de vue a) et b), et il généralise le problème à une somme n quelconque, n étant un entier strictement positif ; les questions qui suivent sont consacrées à cette généralisation.

.../...

1 - On adopte le point de vue (a) (paiement global). On appelle u_n le nombre de façons distinctes d'effectuer le paiement de n francs avec des pièces de 1 et 2 francs (u_n est le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ solutions de $x+2y = n$).

Calculer u_n en fonction de n. On distinguera les cas "n pair" et "n impair".

2 - On adopte le point de vue (b) (paiement pièce à pièce). Le nombre de séquences correspondant au paiement de n francs est noté v_n (il est rappelé, une fois de plus, que (2,1,1) et (1,1,2) sont des séquences distinctes).

Calculer v_1 et v_2.

Former une relation de récurrence liant v_n, v_{n-1} et v_{n-2} lorsque $n \geqslant 3$.

En déduire v_n en fonction de n (on pourra poser $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Note : *Les candidats admettront, pour traiter cette question, le théorème suivant, dont la démonstration n'est pas demandée.*

Soient a et b deux réels tels que $b \neq 0$ et $a^2 + 4b > 0$. L'ensemble des suites réelles de terme général α_n vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \alpha_n = a\,\alpha_{n-1} + b\,\alpha_{n-2},$$

est l'ensemble des suites définies par une expression de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n,$$

où :

- *r_1 et r_2 sont les racines de l'équation du second degré $x^2 - ax - b = 0$;*
- *λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles arbitraires.*

3 - Application numérique.

Donner les valeurs de u_{30} et de v_{30}.

* *

*

.../...

PROBLEME

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$). Si α_{pq} désigne l'élément de l'intersection de la $p^{ième}$ ligne et de la $q^{ième}$ colonne d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on écrit :

$$A = ((\alpha_{pq}))$$

Le déterminant de A est noté det A.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant n complexes, on pose :

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\left(\alpha_{pq}\right)\right) \text{ avec } \alpha_{pq} = a_q^{p-1}.$$

Par exemple : $$V_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ étant encore n complexes, on pose :

$$C_n(b_1, b_2 \ldots b_n) = ((\beta_{pq})), \text{ où :}$$

$$\beta_{pq} = b_{p+q-1} \quad \text{si} \quad p+q-1 \leqslant n,$$

$$\beta_{pq} = b_{p+q-1-n} \quad \text{si} \quad p+q-1 > n.$$

Par exemple : $$C_3(b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ b_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

On associe à cette matrice le polynôme Φ défini par : $\Phi(z) = \sum_{q=1}^{n} b_q z^{q-1}$.

On pose enfin $r_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ et : $U_n = V_n\left(1, r_n, r_n^2, \ldots r_n^{n-1}\right) = \left(\left(r_n^{(p-1)(q-1)}\right)\right)$.

Le but du problème est de donner une méthode de calcul de det $C_n(b_1, b_2 \ldots b_n)$ et d'effectuer ce calcul pour certains choix particuliers des b_q. Les questions 3, 4 et 5 correspondent à ces cas particuliers et sont donc indépendantes entre elles.

1 - Montrer que, quels que soient les complexes $a_1, a_2, \ldots a_n$, on a :

$$\det V_n(a_1, a_2, \ldots a_n) = \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (a_q - a_p)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ce déterminant soit non nul.

.../...

2 - a) Former le produit de matrices : $C_n(b_1, b_2, \dots b_n)\ U_n$.

En posant : $C_n(b_1, b_2, \dots b_n)\ U_n = ((\gamma_{pq}))$,

on montrera que : $\gamma_{pq} = r_n^{(q-1)(n-p+1)}\ \Phi\left(r_n^{q-1}\right)$,

b) En déduire que :

$$\det C_n(b_1, b_2, \dots b_n) = \varepsilon_n \prod_{q-1}^{n} \Phi\left(r_n^{q-1}\right), \text{ où :}$$

$\varepsilon_n = (-1)^{\frac{n}{2}-1}$ si n est pair, $\varepsilon_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ si n est impair.

c) Vérifier enfin que, quel que soit n . $\varepsilon_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$

3 - Dans cette question, on choisit : $b_q = q$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$.

a) Calculer le produit $(1-z)^2 \sum_{q-1}^{n} qz^{q-1}$.

En déduire une expression de $\sum_{q-1}^{n} qz^{q-1}$, valable si $z \neq 1$.

b) Calculer, à l'aide de 2) et de 3)a), une expression de $\det C_n(1,2,\dots,n)$, en fonction de n. Vérifier l'exactitude de la formule trouvée pour n = 3 en calculant directement le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4 - Dans cette question, on prend : $b_q = C_{n-1}^{q-1}$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$.

On rappelle que cette notation désigne les coefficients du binôme de Newton. (Les candidats peuvent, s'ils le désirent, écrire $\binom{n-1}{q-1}$ au lieu de C_{n-1}^{q-1}).

Calculer $\Phi(z)$, puis $\det C_n\left(C_{n-1}^0, C_{n-1}^1, \dots C_{n-1}^{n-1}\right)$. Vérifier l'exactitude de la formule trouvée par calcul direct pour n = 2, puis n = 3.

5 - a désigne ici un complexe donné, tel que $a \neq 0$ et $a \neq 1$. On pose :

$$b_q = a^{q-1} \quad (1 \leqslant q \leqslant n).$$

Donner une expression de $\Phi(z)$, puis calculer simplement $\det C_n(1, a, \dots a^{n-1})$ en fonction de a et de n. Vérifier le résultat dans le cas où n = 3 et a = 2.

* *
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail